

Étude atome Hydrogène

I]

1) Ref galiléen = Ref dans lequel le princ. d'inertie s'applique.
Modèle idéal $\Rightarrow$ il n'existe pas de ref. rigoureusement galiléen.

Approx galiléen $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \bullet \text{ Ref terrestre (Durée} \ll 24\text{h)} \\ \bullet \text{ Ref géocentrique (Durée} \ll 1 \text{ an)} \\ \bullet \text{ Ref héliocentrique ("} \ll 225 \text{ millions d'années)} \end{cases}$$

$\triangle$ Ne pas dire "Pour des durées assez courte" sans préciser devant quoi on les compare! plutôt correct!

2) $\mathcal{R}^*$ $\rightarrow$ référentiel barycentrique : ref dans lequel le barycentre du système est immobile.

$\triangle$ Ne pas confondre "référentiel" et "repère"; le ref une fois choisi, on peut choisir un repère attaché à ce dernier dans lequel le point d'origine est le barycentre... ou pas!

$$\text{Ainsi } \vec{v}_G^* = \frac{m_e \vec{v}_e^* + m_p \vec{v}_p^*}{m_e + m_p} = \vec{0}$$

Aucune raison à $\mathcal{R}^*$ d'être galiléen en général. Cependant, le système $\{\text{proton} + \text{électron}\}$ est isolé ici. Si on décrit la dynamique dans un ref $\mathcal{R}$ galiléen alors :

$$\begin{cases} m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{p \rightarrow e} \\ m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{F}_{e \rightarrow p} = -\vec{F}_{p \rightarrow e} \end{cases}$$

$$\text{Donc } \frac{d}{dt} (m_e \vec{v}_e + m_p \vec{v}_p) \Big|_{\mathcal{R}} = 0 \Rightarrow \vec{v}_G \Big|_{\mathcal{R}} = \frac{m_e \vec{v}_e + m_p \vec{v}_p}{m_e + m_p} = \vec{cst}$$

Ainsi, on passe de $\mathcal{R}$ dans lequel $\vec{v}_G \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{cst}$ à $\mathcal{R}^*$ dans lequel $\vec{v}_G \Big|_{\mathcal{R}^*} = \vec{0}$ par un mouvement rectiligne et uniforme $\Rightarrow \mathcal{R}^*$ est donc galiléen.

3). On se place ici dans un repère ayant pour origine le barycentre: (ce qui n'est pas obligatoire); alors:

$$\vec{OG} = \frac{m_e \vec{r}_e^* + m_p \vec{r}_p^*}{m_e + m_p} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \vec{r}_e^* = -\frac{m_p}{m_e} \vec{r}_p^* \\ \vec{r}_p^* = -\frac{m_e}{m_p} \vec{r}_e^* \end{cases}$$

On introduit $\boxed{\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_p}$

→ On montre facilement que $\begin{cases} \vec{r}_e^* = \frac{m_p}{m_e + m_p} \vec{r} \\ \vec{r}_p^* = -\frac{m_e}{m_e + m_p} \vec{r} \end{cases}$

[Note: si $O \neq G$, alors on aura que

$$\begin{cases} \vec{r}_e^* = \vec{OG} + \frac{m_p}{m_e + m_p} \vec{r} \\ \vec{r}_p^* = \vec{OG} - \frac{m_e}{m_e + m_p} \vec{r} \end{cases}$$

or $\vec{OG} = \vec{OG}$ dans le ref barycentrique; elle ne se compare donc que comme une constante arbitraire.]

Or si on considère la dynamique / à un ref $\mathcal{R}$ galiléen.

$$\begin{cases} m_e \frac{d\vec{v}_e}{dt} = \vec{F}_{p \rightarrow e} \\ m_p \frac{d\vec{v}_p}{dt} = -\vec{F}_{p \rightarrow e} \end{cases} \Rightarrow \frac{d^2}{dt^2} (\vec{r}_e - \vec{r}_p) = \left(\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p} \right) \vec{F}_{p \rightarrow e}$$

$$\Rightarrow \frac{m_e m_p}{m_p + m_e} \frac{d^2}{dt^2} \vec{r} = \vec{F}_{p \rightarrow e}$$

En notant $\mu = \frac{m_e m_p}{m_p + m_e}$

$$\Rightarrow \boxed{\mu \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{p \rightarrow e}}$$

Ainsi en étudiant la dynamique (fictive) se ramenant à une particule de position $\vec{r}$ et de masse μ ; nous pouvons déduire $\vec{r}_e^*$ et $\vec{r}_p^*$; c'est-à-dire les trajectoires du système entier ds le ref. barycentrique.

- Si $m_e \ll m_p$ (on a $1000 \times m_e \approx m_p$) alors $\mu = \frac{1}{\frac{1}{m_e} + \frac{1}{m_p}} \approx m_e$ et $\vec{r}_p^* \approx \vec{0}$; $\vec{r}_e^* = \vec{r}$; la masse de la particule fictive se confond avec la masse de l'électron; la position de la part. fict se confond avec la position de l'électron ds le ref barycentrique.

Puisque le ref barycentrique est galiléen, c'est lui que nous noterons $\mathcal{R}$ dans la suite.

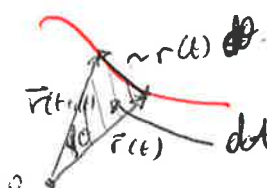
4], Thm du moment cinétique en O appliqué à l'électron :

$$\frac{d\vec{L}_{10}}{dt} \Big|_2 = \vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{0} \text{ car la seule force qui s'exerce est centrale.}$$

$$\rightarrow \vec{L}_{10} = \vec{cst}$$

• Or $\vec{L}_{10} = \vec{r} \wedge m \vec{v}$

$\vec{r}$ et $\vec{v} \in$ ^{à un} ~~un~~ plan perpendiculaire à $\vec{L}$.
 $\rightarrow$ la particule reste donc dans ce plan.



$$d\theta = \frac{r^2 d\theta}{2} \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \ddot{\theta}}{2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r^2 \ddot{\theta}}{2}$$

$$\text{or } \vec{L}_{10} = m \vec{r} \wedge \vec{v} = m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_3$$

$$= m r^2 \dot{\theta} \vec{u}_3$$

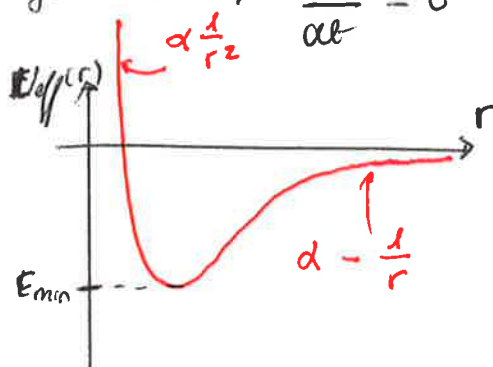
$$= \frac{\|\vec{L}\|}{2m} = \text{cst} \quad \|\vec{L}\|^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2 = \text{cst}$$

$\rightarrow$ Vitesse angulaire constante

$$5] E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - \frac{k}{r} \text{ or } L^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2$$

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\left[\frac{L^2}{2m r^2} - \frac{k}{r} \right]}_{V_{\text{eff}}(r)}$$

• Pas de force non conservatrice $\Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$ $\rightarrow$ D'après le thm de l'énergie méca appliqué au système.



États diffusifs (hyperboles) $E > 0$

parabolique $E = 0$

états liés (ellipses) $E_{\min} < E < 0$

$\rightarrow$ circulaire

$$E = E_{\min} \quad \frac{dE}{dr} = 0$$

6] Symétrie du syst par translation de t $\Rightarrow$ conservation de E
 " " rotation autour de O $\Rightarrow$ " $\vec{L}$

$$7] \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{P}}{dt}}_{= -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r} \wedge \vec{L} + \vec{P} \wedge \underbrace{\frac{d\vec{L}}{dt}}_{= \vec{0}} - \underbrace{\frac{m/e^2}{4\pi\epsilon_0}}_{= k} \underbrace{\frac{d\vec{v}_r}{dt}}_{= \dot{\theta} \vec{u}_\theta}$$

$$= \frac{k}{r^2} L \vec{u}_\theta - mk \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

or $L = mr^2 \dot{\theta}$ dc $\frac{d\vec{A}}{dt} = mk \dot{\theta} \vec{u}_\theta - mk \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{0}$

8] $\vec{A} \cdot \vec{r} = A r \cos \theta$ (par def de θ : angle entre $\vec{r}$ et l'axe qui porte $\vec{A}$ que l'on notera donc Ox)

$$= (\vec{P} \wedge \vec{L}) \cdot \vec{r} - mkr$$

$$= [m(\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \wedge L \vec{u}_z] \cdot \vec{r} - mkr = m \dot{r} \dot{\theta} L - mkr$$

$$= L^2 - mkr$$

Donc $r(A \cos \theta + mk) = L^2 \Rightarrow r(\theta) = \frac{L^2}{mk} \frac{1}{1 + \left(\frac{A}{mk}\right) \cos \theta}$

on notera $p = \frac{L^2}{mk}$ et $e = \frac{A}{mk}$

9] $e = 0 \Rightarrow r(\theta) = p = \text{cst}$ cercle

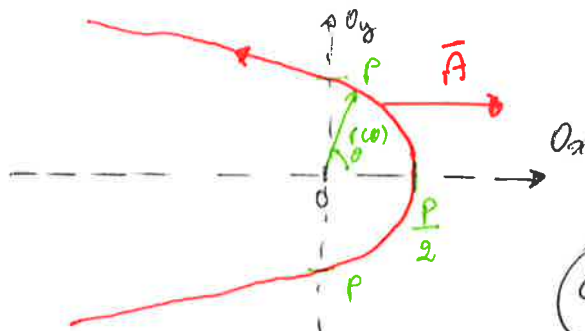
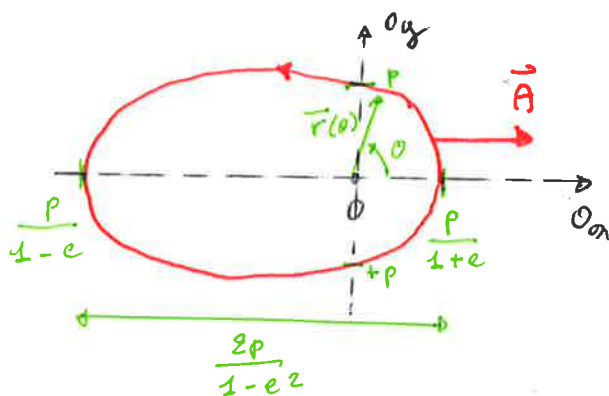
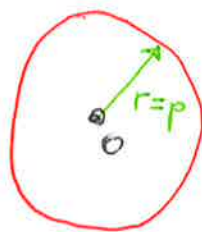
$(\vec{A} = \vec{0})$
 $\hookrightarrow$ il n'y a pas d'axe Ox privilégié.

$0 < e < 1 \Rightarrow r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \rightarrow$ ne diverge jamais

ellipse

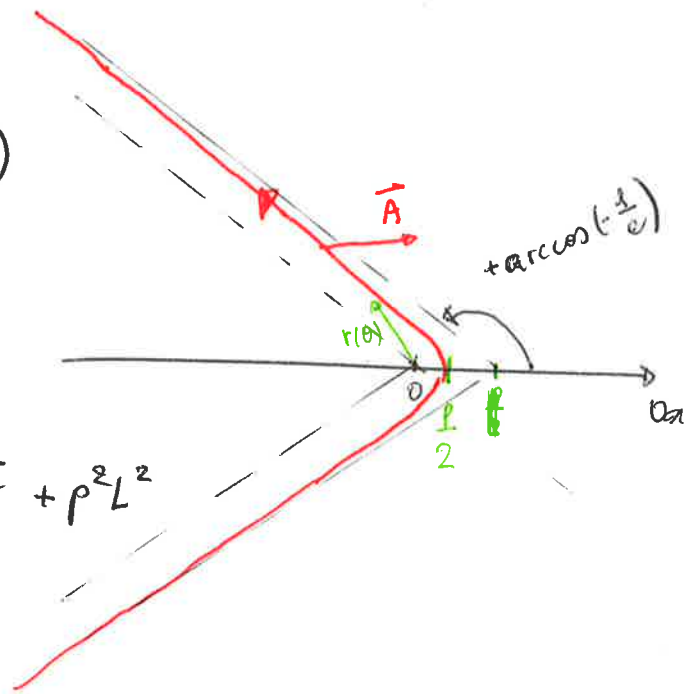
$e = 1 \Rightarrow r(\theta) = \frac{p}{1 + \cos \theta} \rightarrow$ diverge pour $\theta = \pi$

parabole



(4)

$e > 1 \Rightarrow r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \rightarrow \text{diverge pour}$
 $\theta = \pm \arccos(-\frac{1}{e})$
 hyperbole



10) $\|\vec{A}\|^2 = m^2 k^2 + 2mk(\vec{p} \wedge \vec{L})_{\vec{e}_r} + \|\vec{p} \wedge \vec{L}\|^2$

$= m^2 k^2 + 2mk \left[(\vec{r} \wedge \vec{u} + r \partial \vec{u}) \wedge \vec{L} \vec{u}_y \right] \cdot \vec{e}_r + p^2 L^2$

$= m^2 k^2 + \frac{2mkL^2}{r} + p^2 L^2$

$= m^2 k^2 + L^2 \times 2m \left(-\frac{k}{r} + \frac{p^2}{2m} \right)$

$\vec{A}^2 = 2mL^2 E + m^2 k^2$ E

$e^2 - 1 = 2 \frac{L^2}{mk^2} E \Rightarrow E = \frac{mk^2}{2L^2} (e^2 - 1)$

$e < 1 \Rightarrow E < 0 \rightarrow \text{ellipse / états liés}$
 $e = 1 \Rightarrow E = 0 \rightarrow \text{parabole}$
 $e > 1 \Rightarrow E > 0 \rightarrow \text{hyperbole / diffusion}$
 $e = 0 \Rightarrow E = -\frac{mk^2}{2L^2} = E_{\min} \text{ circulaire}$

11) $\vec{L} \wedge \vec{A} = LA \vec{u}_y = \vec{L} \wedge (\vec{p} \wedge \vec{L}) - mk(\underbrace{\vec{L} \wedge \vec{e}_r}_{L \vec{u}_y})$

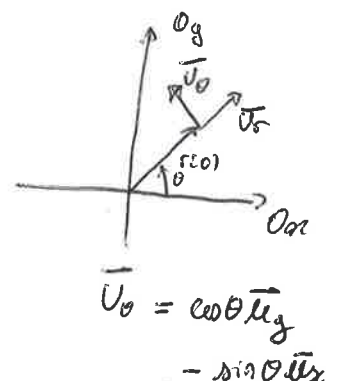
$LA \vec{u}_y = L^2 \vec{p} - mkL \vec{u}_y$

$\begin{cases} L^2 p_x = L^2 p_x + mkL \sin \theta \\ LA = L^2 p_y - mkL \cos \theta \end{cases}$

$\begin{cases} p_x = -\frac{mk}{L} \sin \theta \\ p_y = \frac{A}{L} = +\frac{mk}{L} \cos \theta \end{cases}$

$\rightarrow p_x^2 + \left(p_y - \frac{A}{L}\right)^2 = \left(\frac{mk}{L}\right)^2$

cercle de centre $(0, \frac{A}{L})$ et de rayon $\frac{mk}{L}$

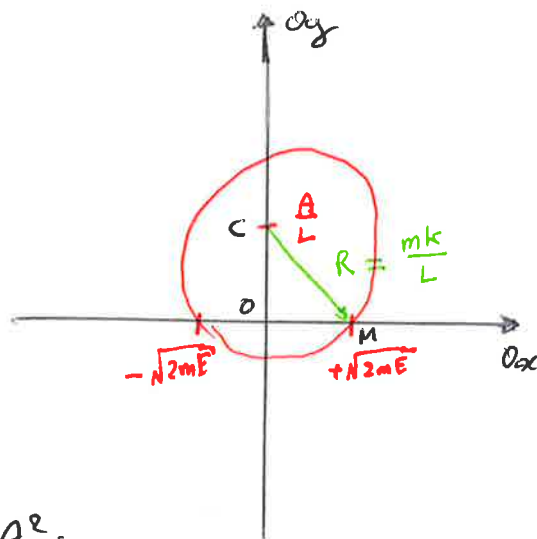


12 $p_y = 0 \Rightarrow p_x^2 = \left(\frac{mk}{L}\right)^2 - \left(\frac{A}{L}\right)^2$
 $p_x = \pm \sqrt{2m|E|}$

on a $A^2 = 2mEL^2 + m^2k^2$

DC $\cdot \left(\frac{A}{L}\right)^2 = 2mE + \left(\frac{mk}{L}\right)^2$

$\rightarrow CO^2 = OM^2 + R^2$



13 On utilise pour cela l'équation de A^2 :

$A^2 = 2mEL^2 + m^2k^2$

↓ différentiation

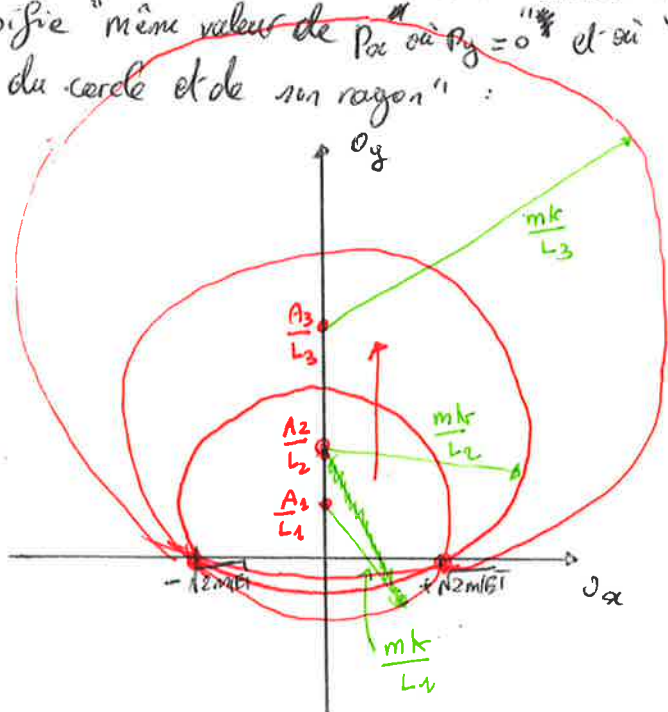
$2A dA = 2mL^2 dE + 4mEL dL$

On veut une variation infinitésimale de L (transf continue) à E constant
 Donc on pose $dE = 0 \rightarrow$

$2A dA = 4mEL dL$

Cette équation ne dit pas autre chose qu'il est possible de varier continuellement le moment cinétique L à énergie constante moyennant une déformation non triviale de la trajectoire (c-à-d une variation de L , liée par l'éq à une variation de A ; qui sont tous 2 liés au paramètre et l'excentricité de l'ellipse, donc liés à une déformation de la trajectoire).

Cette déformation continue de la trajectoire gardant E constant tout en faisant varier A et L de concert s'observe intuitivement dans l'Hodographe : où " E constant" signifie "même valeur de p_x où $p_y = 0$ " et où " L et A varient" signifie "changement du centre du cercle et de son rayon" :



Point de vue quantique

$$1) \vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m r_n v_n = n \hbar \quad (1)$$

$$2) m a_n = \frac{k}{r_n^2} \xrightarrow[\text{circulaire}]{m v_n^2 / r_n} m \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{k}{r_n^2} \Rightarrow \underline{m r_n v_n^2 = k} \quad (2)$$

$$3) \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{k}{n \hbar}} ; \text{substitution dans (1): } m r_n \frac{k}{n \hbar} = n \hbar \rightarrow \boxed{r_n = \frac{(n \hbar)^2}{m k}}$$

L'énergie s'exprime $E = \frac{1}{2} m v_n^2 - \frac{k}{r_n}$
or l'éq (2) montre que $\frac{1}{2} m v_n^2 = \frac{k}{2 r_n} = -\frac{1}{2} E_p$

Donc $E_n = +\frac{1}{2} E_p = -\frac{k}{2 r_n} = \boxed{-\frac{m k^2}{2 \hbar^2 n^2}}$

On a donc

$r_1 = 0,53 \text{ \AA} = \text{rayon de Bohr}$	$r_2 = 2,11 \text{ \AA}$	$r_3 = 4,76 \text{ \AA}$
$v_1 = 2,19 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$	$v_2 = 1,09 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$	$v_3 = 0,73 \cdot 10^6 \text{ m.s}^{-1}$
$E_1 = -2,18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = \underline{13,6 \text{ eV}}$		
$E_2 = 3,4 \text{ eV}$		
$E_3 = 1,51 \text{ eV}$		

⚠ il est important de retenir ces ordres de grandeur, ou du moins, de savoir les retrouver rapidement. (Cela permet par exemple de justifier l'hypothèse de l'électron non relativiste du modèle de l'électron élastiquement lié.)

$$4) E = \frac{m k^2}{2 L^2} \quad (L^2 = \hbar^2) \rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{circulaire} \Rightarrow e=0 \\ \text{quantification} \Rightarrow L = n \hbar \end{array} \right] \rightarrow \boxed{E = -\frac{m k^2}{2 \hbar^2 n^2}}$$

5) l'électron tourne $\Rightarrow$ l'électron devrait rayonner
 $\Rightarrow$ l'électron devrait perdre de l'énergie
 $\Rightarrow$ il devrait s'écraser sur le noyau.

Donc non.

Tout est cohérent!

6) (Note : "quel nombre quantifie $\hat{L}^2$ " plutôt)

→ La norme de $\|\vec{L}\|$ est plutôt quantifiée par l dans un modèle plus élaboré :

$\hat{L}^2 |n, l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |n, l, m\rangle$. et ne dépend pas de n contrairement à Bohr.

→ L'énergie, elle, est toujours exprimée par $E_n = -\frac{mk^2}{2\hbar^2 n^2}$; mais n a un tout autre sens, car il n'est pas du tout lié au moment cinétique.

Ainsi l'énergie ne dépend pas de la valeur du moment cinétique, car sinon elle devrait dépendre de l .

→ Cela aurait pu se prédire en observant le pb classique. En effet, si les symétries en mécanique classique engendrent des invariances de certaines quantités, ces mêmes symétries engendrent des dégénérescences au méca. quant.

lorsqu'on quantifie le pb.
On peut comprendre cela qualitativement avec l'exemple de la symétrie de rotation autour de O (symétrie centrale) ; une rotation continue d'une certaine orbite de l'électron autour de O ne change pas du tout le problème. Cela se constate trivialement car l'expression de E classique ne dépend que de la norme de $\vec{L}$ et non de sa direction. La direction de $\vec{L}$ étant gérée à l'opérateur $\hat{L}_z$ dans le pb quantique et E à l'opérateur $\hat{H}$. Le principe de correspondance impose que les valeurs propres de $\hat{H}$ (c'est-à-dire E_n) ne dépendent pas des valeurs propres de $\hat{L}_z$ (c'est-à-dire $\hbar m$). On constate donc la dégénérescence des sous-niveaux m qui ont la même énergie : E_n ne dépend pas de m .

La dégénérescence en l de l'énergie est bcp plus étonnante, car l'énergie classique dépend explicitement de la norme de $\vec{L}$. Cependant, l'analyse du pb ci-dessus montre qu'il est en fait possible de subtillement déformer une certaine orbite de l'électron, en gardant E constant, et en passant à la valeur de L^2 que l'on souhaite. Puisque E ne fixe absolument pas $\|\vec{L}\|^2$ par le même principe de correspondance, on comprend que les vp de $\hat{H}$ n'ont donc pas à dépendre des vp de $\hat{L}^2$, soit $l \rightarrow E_n$ ne dépend pas de l .

Bref,

Tout cela pour vous dire qu'il faut s'émerveiller qu'un modèle aussi faux que celui de Bohr donne des résultats aussi justes...

TRM Larmor :

1] PFD dans $\mathcal{R}$ galiléen : $m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r - e \vec{v} \wedge \vec{B}$.

2] " $\mathcal{R}'$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}$ à $\vec{\Omega}$ constant : $m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r - e \vec{v} \wedge \vec{B} + 2m \vec{v} \wedge \vec{\Omega} - m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$

Donc $m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r + \vec{v} \wedge (-e \vec{B} + 2m \vec{\Omega}) - m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$
 $= \vec{0}$ si $\boxed{\vec{\Omega} = \frac{e}{2m} \vec{B}}$

Dc dans $\mathcal{R}'$ en rotation de $\vec{\Omega} = \frac{e}{2m} \vec{B}$ ($\|\vec{\Omega}\| \approx 8,79 \cdot 10^{10} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ à 1 T)
 $m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r - m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r})$

3] on utilise $r = 0,52 \text{ \AA} = 0,52 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

$$\left\| \frac{k}{r^2} \right\| = 8,25 \cdot 10^{-48} ; \left\| m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \right\| = \Omega^2 r^2 = 3,72 \cdot 10^{-19}$$

Dc $\left\| \frac{k}{r^2} \right\| \gg \left\| m \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{r}) \right\| \rightarrow \boxed{m \frac{d\vec{v}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r}$

La dynamique dans $\mathcal{R}'$ se réduit à celle dans $\mathcal{R}$.

4] L'orbite garde exactement la même forme auquel se superpose simplement une rotation $\vec{\Omega}$ selon $\vec{e}_z \Rightarrow$ mt de précession.

5] si $\vec{v}_0$ est la vitesse initiale, l'électron subira une accélération après application de $\vec{B}$: $\vec{v} = \vec{v}_0 + \Omega \vec{r}_\perp \vec{u}_z \rightarrow \Delta \vec{m} = \vec{m} - \vec{m}_0 = -\frac{e}{2} \vec{r}_\perp \wedge (\vec{v}_0 + \Omega \vec{r}_\perp) \vec{u}_z + \frac{e}{2} \vec{r}_\perp \wedge \vec{v}_0$

Bref $\Delta \vec{m} = -\frac{e r_\perp^2 \Omega}{2} \vec{u}_z = -\frac{e^2 r_\perp^2}{4m} B \vec{u}_z = \boxed{-\frac{e^2 r_\perp^2}{4m} \vec{B}}$

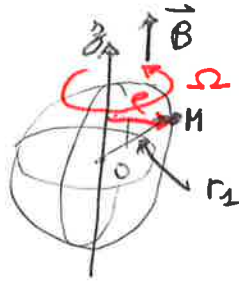
6] $\Delta \vec{m}$ est de sens opposé à $\vec{B} \rightarrow$ il s'agit d'une loi de magnétisation ; les effets s'opposent ceux causes qui leur ont donné naissance.

$$\|\Delta \vec{m}\| = 1,97 \cdot 10^{-23} \text{ A} \cdot \text{m}^2$$

Il s'agit du phénomène de diamagnétisme.

NB : un électron n'a a priori pas de raison d'être sur une orbite où $\vec{L} \parallel \vec{B}$. (9)

un modèle plus réaliste peut être facilement proposé en considérant que l'électron s'étale en moyenne sur une sphère de rayon r_1 .



Un point M sur la sphère présentera autour de O_z la pulsation Ω ; donc aura un gain de vitesse $e\Omega \vec{u}_\theta$ avec ρ la distance à l'axe O_z ; doit créer une aimantation

$$\Delta \vec{m} = - \frac{e^2 \rho^2}{4m} \vec{B}$$

Or $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$ et $\rho^2 = x^2 + y^2$; si l'état est homogène $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$

Donc $r_1^2 = 3\langle x^2 \rangle$ et $\langle \rho^2 \rangle = 2\langle x^2 \rangle$

D'où $\langle \rho^2 \rangle = \frac{2}{3} r_1^2$

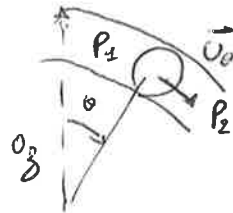
Ainsi $\langle \Delta \vec{m} \rangle = - \frac{e^2 r_1^2}{6m} \vec{B}$; l'ordre de grandeur reste le même !

Une référence de ce calcul peut être trouvée dans le Bertin, Faroux Renault, Electromagnétisme tome 4.

BiFurcation (Exercice tiré du problème de physique 2016.)

1] $\vec{F}_{\text{pression}} = d(P_1 - P_2) \vec{u}_\theta$

or $P_1 = \frac{\rho RT}{V_0 + L\Delta\theta}$ $P_2 = \frac{\rho RT}{V_0 - L\Delta\theta}$



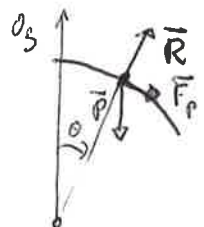
$$\begin{cases} P_1 = \frac{RT}{V_0} \left(1 + \frac{L\Delta\theta}{V_0}\right)^{-1} \simeq \frac{RT}{V_0} \left(1 - \frac{L\Delta\theta}{V_0}\right) \\ P_2 = \frac{RT}{V_0} \left(1 - \frac{L\Delta\theta}{V_0}\right)^{-1} \simeq \frac{RT}{V_0} \left(1 + \frac{L\Delta\theta}{V_0}\right) \end{cases}$$

$\rightarrow \vec{F}_{\text{pression}} = -2 \frac{RT L \Delta^2}{V_0^2} \theta \vec{u}_\theta = -a T \theta \vec{u}_\theta$ avec $a = 2 \frac{R L \Delta^2}{V_0^2}$

3] Bilan de force : Poids ; réaction du tube ; force de pression

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -mg \vec{u}_z + \vec{R} - a T \theta \vec{u}_\theta$$

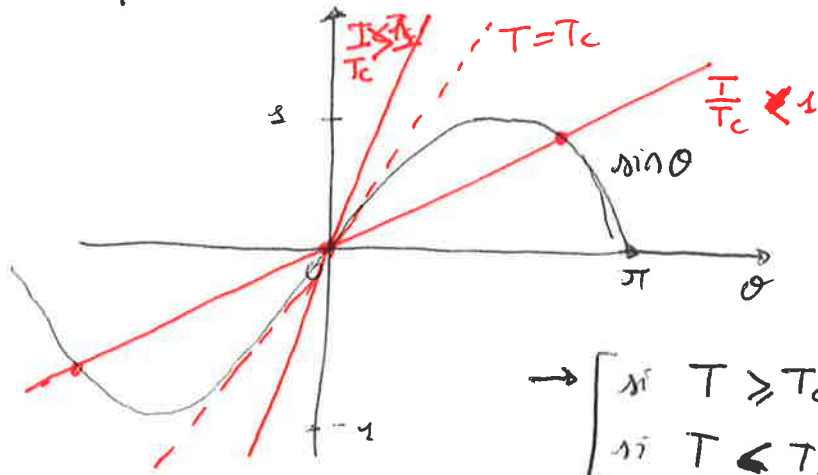
on a $\vec{v} = L \dot{\theta} \vec{u}_\theta \rightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} = m L \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$



De projection sur $\vec{u}_\theta$: $m L \ddot{\theta} = mg \sin \theta - a T \theta$

(10)

3] équilibre : $\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \sin \theta_{eq} = \frac{\alpha T}{mg} \theta_{eq} = \frac{T}{T_c} \theta_{eq}$ avec $T_c = \frac{mg}{\alpha}$



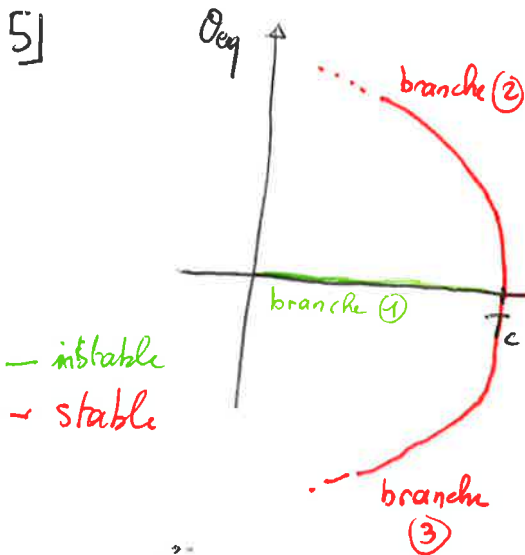
$\rightarrow \begin{cases} \text{si } T \geq T_c \text{ alors 1 position d'eq: } \theta_{eq} = 0 \\ \text{si } T < T_c \text{ alors 3 position d'eq: } \pm \theta_0 \text{ et } 0 \end{cases}$

4] On considère les positions d'équilibres non nulles pour $T < T_c$: θ_0 .
On sait que $\theta_0 \rightarrow 0$ lorsque $T \rightarrow T_c^-$:

$$\sin \theta_0 \underset{T \rightarrow T_c^-}{\approx} \theta_0 - \frac{\theta_0^3}{6} \Rightarrow \theta_0 - \frac{\theta_0^3}{6} = \frac{T}{T_c} \theta_0$$

$$\begin{aligned} \theta_0 \neq 0 \\ \Rightarrow 1 - \frac{\theta_0^2}{6} &= \frac{T}{T_c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_0 = \sqrt{\frac{6}{T_c}} \sqrt{T_c - T}}$$



On reprend l'éq de la question 3)
et on considère une petite perturbation
autour d'un équilibre θ_0 : $\theta = \theta_0 + s\theta(u)$

$$mL \ddot{\theta} = mg \sin \theta - \alpha T \theta$$

$$mL \ddot{s\theta} = mg \sin \theta_0 + mg \cos \theta_0 s\theta - \alpha T \theta_0 - \alpha T s\theta$$

$$mL \ddot{s\theta} = mg (\cos \theta_0 - \frac{1}{T_c}) s\theta$$

$$\leftarrow \boxed{\ddot{s\theta} = \frac{g}{L} (\cos \theta_0 - \frac{1}{T_c}) s\theta}$$

On a $\ddot{s\theta} = A s\theta$

($s\theta(u)$ diverge si $A > 0$ et reste borné si $A < 0$.)

Pour $\theta_0 = 0 \rightarrow \ddot{s\theta} = \frac{g}{L} (1 - \frac{1}{T_c}) s\theta$

> 0 si $\frac{1}{T_c} < 1 \rightarrow$ branche (1) instable

< 0 si $\frac{1}{T_c} > 1 \rightarrow$ branche (2) stable. (11)

Pour θ_0 sur la branche (2) et (3) ~~sur la branche (2) et (3)~~

$$\cos \theta_0 \stackrel{T \rightarrow T_c}{=} 1 - \frac{\theta_0^2}{2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{6}{T_c} (T_c - T) \right) = 1 + 3 \frac{T}{T_c} - 3 = -2 + 3 \frac{T}{T_c}$$

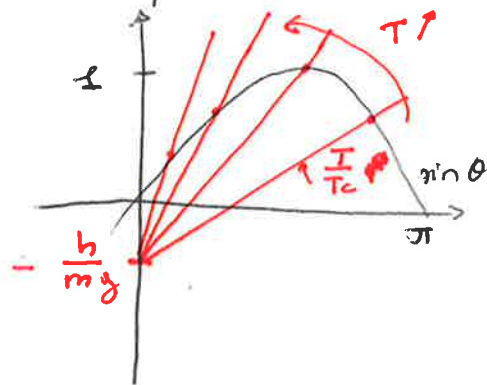
$$\cos \theta_0 - \frac{T}{T_c} = 2 \left(\frac{T}{T_c} - 1 \right) < 0 \text{ si } T < T_c$$

→ branche (2) et (3) stable

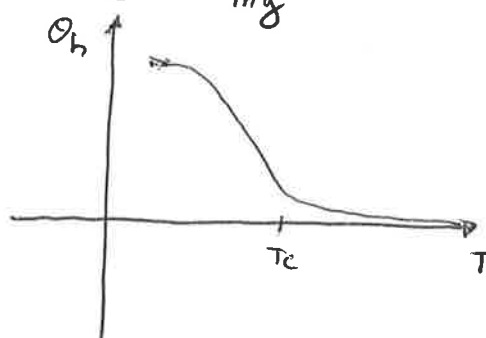
6] l'équation 3) se réécrit: $mL\ddot{\theta} = mgsin\theta - aT\theta + h$

D'où équation de stabilité:

$$sin\theta = \frac{T}{T_c}\theta - \frac{h}{mg}$$



→



7] on a $\theta_h = \theta_0 + \Delta\theta \rightarrow sin\theta = sin\theta_0 + cos\theta_0\Delta\theta = \frac{T}{T_c}\theta_0 + \frac{T}{T_c}\Delta\theta - \frac{h}{mg}$

on a $\frac{\partial \theta_h}{\partial h} = \frac{\partial \Delta\theta}{\partial h}$ et $\Delta\theta = \frac{h/mg}{T/T_c - cos\theta_0}$

1^{er} cas: $T \rightarrow T_c^+$; alors $\theta_0 = 0$

$$\Delta\theta = \frac{h/mg}{T/T_c - 1} \rightarrow \boxed{\chi^+ = \frac{1}{mg} \frac{T_c}{T - T_c}}$$

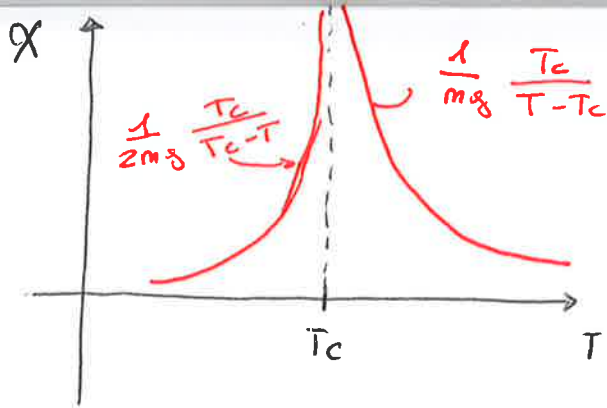
2^{ème} cas: $T \rightarrow T_c^-$; alors $\theta_0 \sim \sqrt{\frac{6}{T_c}} \sqrt{T_c - T}$

$$cos\theta_0 \sim 3 \frac{T}{T_c} - 2 \text{ donc } \Delta\theta = \frac{h/mg}{2(1 - \frac{T}{T_c})}$$

$$\boxed{\chi^- = \frac{1}{2mg} \frac{T_c}{T_c - T}}$$

Note: χ^- et χ^+ sont positifs. Plusieurs m'ont demandé une susceptibilité négative qui signifierait qu'une poussée à droite équilibre l'objet à gauche...

Astuce pour éviter les pbs: éviter de manipuler des valeurs absolues (et ce même si on énonce méchant vous dit de présenter vos résultats avec...) (12)



8] ~~$\theta_n + \frac{\theta_n^3}{6} = \theta_R + \frac{h}{mg}$~~

$$\sin \theta = \theta - \frac{h}{mg} \rightarrow \theta_n + \frac{\theta_n^3}{6} = \theta_R - \frac{h}{mg}$$

D'où $\theta_n^3 = \frac{6h}{mg} \rightarrow \boxed{\theta_R = \left(\frac{6h}{mg}\right)^{1/3}} \quad \underline{\underline{s=3}}$

Méca solide

Preliminaire : c'est juste du cours !

Mvt d'un solide dans le vide

1] PFD dans $\mathcal{R}$ galiléen $\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} = \vec{0} \leftarrow \text{solide isolé}$

2] $\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{L} \Big|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$ avec $\vec{L} \Big|_{\mathcal{R}'} = \begin{pmatrix} I_{xx}' & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy}' & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$
 $\vec{\omega}$: ~~moment~~ vecteur rotation instantané du solide
et rotation de $\mathcal{R}'$ à $\mathcal{R}$.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} I_{xx}' \omega_x' \\ I_{yy}' \omega_y' \\ I_{zz}' \omega_z' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x' \\ \omega_y' \\ \omega_z' \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_{xx}' \omega_x' \\ I_{yy}' \omega_y' \\ I_{zz}' \omega_z' \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} I_{xx}' \dot{\omega}_x' + (I_{zz}' - I_{yy}') \omega_y' \omega_z' = 0 \\ I_{yy}' \dot{\omega}_y' + (I_{xx}' - I_{zz}') \omega_x' \omega_z' = 0 \\ I_{zz}' \dot{\omega}_z' + (I_{yy}' - I_{xx}') \omega_x' \omega_y' = 0 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} I_{x'} = I_{y'} = I \\ I_{z'} = I' \end{cases}$$

Donc $I_{z'} \dot{\omega}_{z'} + (I_{y'} - I_{x'}) \omega_{z'} \omega_{y'} = 0$

$$\rightarrow \dot{\omega}_{z'} = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_{z'} = \text{cst}}$$

$$4) \begin{cases} \dot{\omega}_{x'} + \frac{I' - I}{I} \omega_{z'} \omega_{y'} = 0 \\ \dot{\omega}_{y'} + \frac{I - I'}{I} \omega_{z'} \omega_{x'} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\omega}_{x'} + \left(\frac{I' - I}{I} \omega_{z'} \right)^2 \omega_{x'} = 0 \\ \ddot{\omega}_{y'} + \left(\frac{I' - I}{I} \omega_{z'} \right)^2 \omega_{y'} = 0 \end{cases}$$

$$\omega_{x'} = A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)$$

$$\omega_{y'} = A' \cos(\Omega t) + B' \sin(\Omega t)$$

On prend comme condition initiale $\omega_{x'}(0) = \omega_0$, $\omega_{y'}(0) = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} \omega_{x'} = \omega_0 \cos(\Omega t) + B' \sin(\Omega t) \\ \omega_{y'} = B' \sin(\Omega t) \end{cases}$$

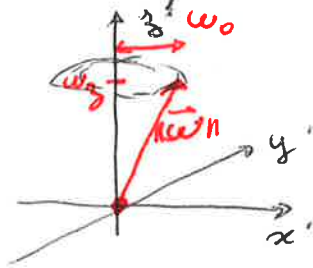
$$\dot{\omega}_{x'} + \frac{I' - I}{I} \omega_{z'} \omega_{y'} = 0 \Rightarrow B' = \omega_0$$

$$\text{pt } \|\vec{\omega}\|^2 = \omega_0^2 \Rightarrow B = 0$$

$$\omega_{x'}^2 + \omega_{y'}^2 = \omega_0^2$$

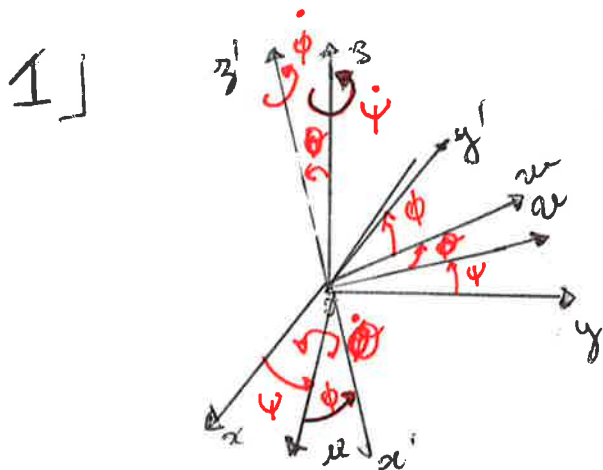
$\rightarrow$

$\vec{\omega}$ précesse à la pulsation Ω .

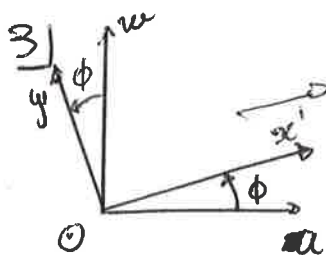


$$\begin{cases} \omega_{x'} = \omega_0 \cos(\Omega t) \\ \omega_{y'} = \omega_0 \sin(\Omega t) \end{cases}$$

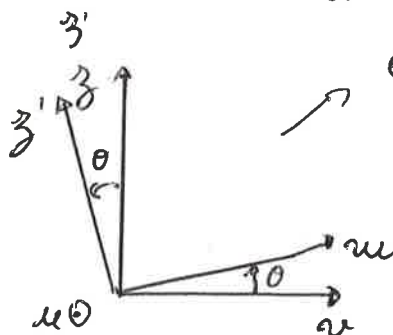
Mvt d'une toupie déséquilibrée



$$2) \vec{\Omega} = \dot{\psi} \vec{e}_z + \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\phi} \vec{e}_z'$$



$$\begin{cases} \vec{e}_x = \cos \phi \vec{e}_{x'} - \sin \phi \vec{e}_{y'} \\ \vec{e}_y = \sin \phi \vec{e}_{x'} + \cos \phi \vec{e}_{y'} \end{cases}$$



$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_{z'} + \sin \theta \vec{e}_\theta$$

D'où $\vec{e}_3 = \cos\theta \vec{e}_{z'} + \sin\theta \cos\phi \vec{e}_{y'} + \sin\theta \sin\phi \vec{e}_{x'}$,

et $\vec{\Omega} = \dot{\psi} (\cos\theta \vec{e}_{z'} + \sin\theta \cos\phi \vec{e}_{y'} + \sin\theta \sin\phi \vec{e}_{x'}) + \dot{\theta} (\cos\phi \vec{e}_{x'} - \sin\phi \vec{e}_{y'}) + \dot{\phi} \vec{e}_{z'}$.

$$\vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin\phi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\phi \\ \dot{\psi} \cos\phi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta \end{pmatrix}$$

4) Répartition de masse symétrique selon Oz' $\rightarrow \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_{z'} \end{pmatrix}$

Dans R' et dans R : l'axe Oz' est aligné avec cet axe de symétrie.

5) $\vec{\Omega}_{R'/R} = \vec{\Omega}_{R'/R}|_{\phi=0} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta \end{pmatrix}_{R'}$
 $\vec{\omega} = \vec{\Omega}_{R'/R} + \dot{\phi} \vec{e}_{z'} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \sin\theta \\ \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi} \end{pmatrix}_{R'}$

6) $\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right|_{R'} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{L} = \rho m g \cdot (\vec{u}_{z'} \wedge \vec{u}_3) = \rho m g \sin\theta \vec{u}_{x'}$
 avec $\vec{L} = \underline{\underline{I}} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_x \dot{\theta} \\ I_y \dot{\psi} \sin\theta \\ I_{z'} \dot{\psi} \cos\theta + I_{z'} \dot{\phi} \end{pmatrix}$ avec $\underline{\underline{I}}_{xx} = \underline{\underline{I}}_{yy} = 0$.

$$\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \underline{\underline{I}} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{z'} \dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + I_{z'} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin\theta - I \dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta \\ -I_{z'} \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta - I_{z'} \dot{\theta} \dot{\phi} + I \dot{\theta} \dot{\psi} \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \begin{pmatrix} I \ddot{\theta} \\ I \ddot{\psi} \sin\theta + I \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta \\ I_{z'} \ddot{\psi} \cos\theta - I_{z'} \dot{\psi} \dot{\theta} \sin\theta + I_{z'} \ddot{\phi} \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} I \ddot{\theta} + (I_{z'} - I) \dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta + I_{z'} \dot{\psi} \dot{\phi} \sin\theta = \rho m g \sin\theta \\ I \ddot{\psi} \sin\theta + (2I - I_{z'}) \dot{\psi} \dot{\theta} \cos\theta - I_{z'} \dot{\theta} \dot{\phi} = 0 \\ \ddot{\psi} \cos\theta - \dot{\psi} \dot{\theta} \sin\theta + \ddot{\phi} = 0 \end{cases}$$

7] Si $\dot{\phi} \gg \dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ on se retrouve avec le système d'équation:

$$\begin{cases} I_3' \ddot{\psi} \dot{\phi} \sin \theta = p m g \sin \theta & (1) \\ I_3 \ddot{\theta} \dot{\phi} = 0 & (2) \\ \ddot{\phi} = 0 & (3) \end{cases}$$

D'où $\dot{\phi} = \text{cst}$ (3); de (2) on déduit $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \theta = \text{cst}$

et si on suppose que $\theta \neq 0$ initialement, on déduit de (1):

$$\boxed{\ddot{\psi} = \frac{p m g}{I_3 \dot{\phi}}} \quad \text{vitesse de précession de la toupie.}$$

8] Plus simple: $\vec{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I_3 \dot{\phi} \end{pmatrix}$ $\vec{\Gamma}(\vec{P}) = p \vec{e}_3 \wedge m g (-\vec{e}_3)$

$\downarrow$

$\vec{L} = I_3 \dot{\phi} \vec{e}_3 \rightarrow \vec{\Gamma}(\vec{P}) = p \frac{\vec{L}}{I_3 \dot{\phi}} \wedge m g (-\vec{e}_3)$

$$\vec{\Gamma} = \frac{p m g}{I_3 \dot{\phi}} \vec{e}_3 \wedge \vec{L}$$

Donc l'hm moment cinétique: $\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_R = \vec{\Gamma}(\vec{P}) = \underbrace{\frac{p m g}{I_3 \dot{\phi}}}_{\gamma} \vec{e}_3 \wedge \vec{L}$

9] $\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_R \cdot \vec{L} = 0 = \frac{d\|\vec{L}\|^2}{dt}$

$\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_R \cdot \vec{e}_3 = 0 = \frac{d(L_3)}{dt}$

10] $\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_R + \vec{\Omega}_{R/R_i} \wedge \vec{L} = \gamma \vec{e}_3 \wedge \vec{L}$

si $\vec{\Omega}_{R/R_i} = \gamma \vec{e}_3$

$\downarrow$

$\frac{d\vec{L}}{dt} \Big|_{R_i} = \vec{0} \rightarrow$ se ramène à un pb sans pesanteur.

Note: L'énoncé a écrit "Ri", mais il aurait fallu écrire "Référentiel R_i tournant quelconque".

$\downarrow$

Soit R_i référentiel tournant à la pulsation $\vec{\Omega}_{R/R_i}$ par rapport à R.

Ici le raisonnement est le même qu'à l'ex sur le lhm de Larmor. L'ajout de la pesanteur au pb ne fait que rajouter une rotation de vecteur $\vec{\Omega} = \gamma \vec{e}_3 \rightarrow$ une précession d'axe Oz donc. Comme prév. (16)

11 : NB : Un malheureux lapsus lors de la rédaction de l'énoncé a fait écrire le mot "cylindrique" là où je pensais en fait à une toupie "conique". La longueur l au centre de gravité est donc devenue triviale et le moment d'inertie simple à calculer. Ce qui est qd m'importe.

$$I_3 = \iiint \rho(x^2 + y^2) dV \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \text{ constante, } dV = r dr d\theta dz \rightarrow \text{intégration selon } z \\ \text{et } \theta \text{ triviale } (= 2\pi R) \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right.$$

$$= 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr$$

$$= \pi \frac{h \rho R^4}{2} \quad \text{or } M = \pi R^2 h \rho$$

$$I_3 = \frac{1}{2} M R^2 \quad \text{et } l = \frac{h}{2} \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{p_{m\psi}}{I_3 \dot{\phi}} = \frac{h g}{R^2 \dot{\phi}}$$

Donc $T = \frac{2\pi}{\dot{\psi}} = 2\pi \frac{R^2 \dot{\phi}}{h g}$; on a $\dot{\phi} = 206 \cdot s^{-1} = 125,66 \text{ rad} \cdot s^{-1}$

(Ne pas oublier de faire cette conversion!)

$$\boxed{T = 2 \text{ s}}$$

12 | Exemple classique mais joli : on peut calculer que, du fait de la non-sphéricité de la terre, le moment des forces de marée (exercées principalement par la lune et le soleil) sur la terre est non nul $\Rightarrow$ en considérant de plus la rotation de la terre, nous avons là un modèle de toupie déséquilibrée.

$\hookrightarrow$ on voit apparaître une très lente précession de l'axe de rotation de la terre par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de l'écliptique passant par le centre de la terre.

La période est d'environ 25 760 années.